Leçon 213 - Espaces de Hilbert. Exemples d'applications.

Extrait du rapport de jury

La théorie des espaces de Hilbert est riche. Les propriétés algébriques fondamentales, l'utilisation de la complétude et la projection orthogonale sur les convexes fermés (en particulier les sous-espaces vectoriels fermés) doivent être bien comprises.
L'analyse de Fourier, sur le cercle ou la droite réelle, est évidemment une illustration fondamentale des résultats de ce chapitre. Le jury a noté que la théorie L 2 des séries de Fourier n'était pas souvent maîtrisée.
Les concepts de famille orthonormée et de base hilbertienne constituent une source abondante d'applications. Le fait que les polynômes constituent une base hilbertienne de l'espace des fonctions de carré intégrable relativement à certains poids est présenté quasi systématiquement en développement. Peut-être faudrait-il songer à trouver d'autres sources d'inspiration, d'autant que la preuve et en déduire une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ ne sont pas parfaitement compris.
Les candidats solides pourront s'intéresser aux propriétés spectrales des opérateurs autoadjoints compacts d'un espace de Hilbert, à la minimisation de fonctionnelles convexes et coercives sur un espace de Hilbert, ou encore au théorème de Paley-Wiener qui caractérise les fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier est à support compact, ou encore au théorème d'échantillonnage de Shannon.

Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 213 intitulée : "Espaces de Hilbert. Exemples d'applications.". C'est avec Hilbert que se développe la volonté de fonder les mathématiques sur la géométrie, d'où en particulier la recherche de la légitimation des raisonnements géométriques dans des espaces de dimension infinie ainsi que la généralisation en dimension infinie des résultats concernant les bases algébriques. C'est donc en ce sens que s'oriente cette leçon.
On commence tout d'abord par discuter sur les généralités dans les espaces de Banach. Tout d'abord, on commence par rappeler des définitions générales en allant des espaces préhilbertiens aux espaces hilbertiens. On rappelle ainsi les définitions d'un produit scalaire ainsi que d'espace préhilbertien, euclidien et hermitien. On introduit ensuite une norme appelée "norme hilbertienne" qui découle d'un produit scalaire et on montre qu'elle vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz ainsi que l'identité du parallélogramme et de polarisation. On termine ce premier point en énonçant la définition d'un espace de Hilbert ainsi que quelques exemples ainsi que des propriétés relatives à un sous-espace et au complété. Dans une deuxième sous-partie, on s'intéresse à la notion d'orthogonalité en définissant des éléments et parties orthogonales ainsi que le théorème de Pythagore et quelques résultats sur l'orthogonal.
Dans une deuxième partie, on s'intéresse tout particulièrement à la projection dans les espaces de Hilbert et à leurs conséquences. On énonce donc tout d'abord les théorèmes de projection avec en premier le cas de la projection sur un convexe fermé que l'on peut ensuite généraliser à un sous-espace vectoriel non trivial. Les deux principales conséquences à ces théorèmes sont le théorème de représentation de Riesz qui permet de montrer que tout espace de Hilbert peut être identifié à son dual (on parle alors d'espace réflexif) ainsi que l'existence de l'adjoint d'un opérateur qui peut s'interpréter en dimension finie comme la transposée de la matrice canoniquement associée à une application linéaire dans le cas réel ou la transconjuguée dans le cas complexe.
Pour finir, on s'intéresse dans une dernière partie aux bases hilbertiennes ainsi qu'à quelques applications (notamment généraliser les propriétés vraies en dimension finie avec les bases algébriques). On commence d'abord par quelques généralités sur les bases hilbertiennes telles que les définitions d'une famille orthogonale/orthonormale/totale ainsi que de base hilbertienne. Ces quelques notions nous permettent d'énoncer des résultats forts comme par exemple l'inégalité de Bessel, l'égalité de Parceval ou encore le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. On étudie ensuite en profondeur les bases hilbertiennes et on montre qu'elles existent toujours et qu'elles sont équipotentes. On peut alors classifier les espaces de Hilbert via la dimension hilbertienne et en déduire que deux espaces de Hilbert sont isométriquement isomorphes si, et seulement si, ils ont la même dimension hilbertienne. On passe ensuite à la première application qui est consacrée aux séries de Fourier : le but est de transposer les résultats généraux des espaces de Hilbert et en y ajoutant les résultats propres à la théorie de Fourier. On commence ainsi par donner la définition des coefficients de Fourier ainsi que de la série de Fourier. Cependant, le résultat primordial de cette sous-partie est que la famille des

exponentielles est non seulement une famille orthonormale de $L^2(\mathbb{T})$, mais en fait elle est bien plus que ça : elle en est une base hilbertienne ! Cela permet alors de faire des calculs de sommes de manière astucieuse. On termine enfin cette partie ainsi que cette leçon avec une dernière sous-partie consacrée aux polynômes orthogonaux (qui sont très utiles en intégration numérique). On commence par énoncer la définition d'une fonction poids avant de s'intéresser à l'espace $L^2(I,\rho)$ qui est un espace de Hilbert et on conclut en donnant des exemples de fonctions poids ainsi que des polynômes unitaires orthogonaux et une condition suffisante pour que ces polynômes forment une base hilbertienne de l'espace $L^2(I,\rho)$.

Plan général

Cours détaillé

Dans toute cette leçon, H désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Espaces de Hilbert

I.1 Des espaces préhilbertiens aux espaces hilbertiens

Définition 1 : Produit scalaire [Hassan, p.479] :
On appelle **produit scalaire sur** H toute forme hermitienne définie et positive sur H.

Définition 2 : Espace préhilbertien/euclidien/hermitien [Hassan, p.480] :
On appelle :
* **espace préhilbertien** la donnée de H et d'un produit scalaire $<\cdot;\cdot>$ sur H.
* **espace euclidien** un $\mathbb{R}$-espace vectoriel préhilbertien de dimension finie.
* **espace hermitien** un $\mathbb{C}$-espace vectoriel préhilbertien de dimension finie.

On suppose jusqu'à la fin de cette partie que $(H,<\cdot;\cdot>)$ un $\mathbb{K}$-espace préhilbertien.

Proposition 3 : [Hassan, p.480]
L'application :

$$\|\cdot\| : \left| \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{<x;x>} \end{array} \right.$$

est une norme (appelée **norme hilbertienne**) sur H.

Proposition 4 : [Hassan, p.482]
Pour tout $(x,y)\in H^2$, on a $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(<x;y>) + \|y\|^2$

Proposition 5 : Inégalité de Cauchy-Schwarz [Hassan, p.482] :
Pour tout $(x,y)\in H^2$, on a $|<x;y>| \leq \|x\|\,\|y\|$.
De plus, l'égalité est réalisée si, et seulement si, x et y sont linéairement indépendants.

Corollaire 6 : [Hassan, p.483]
L'application $<\cdot;\cdot>$ est continue de $H\times H$ dans $\mathbb{K}$.

Proposition 7 : Identité du parallélogramme [Hassan, p.482] :
Pour tout $(x,y)\in H^2$, on a :

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$$

Proposition 8 : Identités de polarisation [Hassan, p.478] :
Si $(H, <\cdot;\cdot>)$ est un espace préhilbertien, alors :

$$\forall (x,y) \in H^2,\ <x;y> = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \quad (\text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R})$$

$$\forall (x,y) \in H^2,\ <x;y> = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\,\|x+iy\|^2 - i\,\|x-iy\|^2\right) \quad (\text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C})$$

Définition 9 : Espace de Hilbert [Hassan, p.480] :
On appelle **espace hilbertien** tout espace préhilbertien qui est aussi de Banach pour la norme associée au produit scalaire.

Exemple 10 : [Hassan, p.480]
* $\mathbb{R}^n$ muni de $<x;y> = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ est un espace de Hilbert.
* $\mathbb{C}^n$ muni de $<x;y> = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$ est un espace de Hilbert.
* Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie muni d'un produit scalaire est complet et donc de Hilbert.
* $\ell^2_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ muni de $<x;y> = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \overline{y_i}$ est un espace de Hilbert.
* $\mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$ muni de $<f;g> = \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$ est un espace préhilbertien non complet.

Proposition 11 : [Hassan, p.481]
Soit F un sous-espace vectoriel de $(H, <\cdot;\cdot>)$.
La restriction du produit scalaire $<\cdot;\cdot>$ à $F \times F$ confère à F une structure de $\mathbb{K}$-espace préhilbertien.
De plus, si H est un espace de Hilbert, alors F est un espace de Hilbert si, et seulement si, F est fermé dans H.

Proposition 12 : [Hassan, p.483]
Le complété d'un $\mathbb{K}$-espace préhilbertien est un espace de Hilbert.

I.2 Orthogonalité

Définition 13 : Éléments/parties orthogonaux [Hassan, p.484] :
On dit que deux :
* éléments $x, y \in H$ sont **orthogonaux** lorsque $<x;y> = 0$.
* parties non vides $A, B \subseteq H$ sont **orthogonales** lorsque pour tout $(x,y) \in A \times B$ on a $<x;y> = 0$.

Définition 14 : Orthogonal d'une partie [Hassan, p.484] :
On considère A une partie non vide de H.
On appelle **orthogonal de** A l'ensemble $A^\perp = \{y \in E \text{ tq } \forall x \in A, <x;y> = 0\}$.

Théorème 15 : Théorème de Pythagore [Hassan, p.484] :
Soit $(x_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ une famille d'éléments de H.
Si les x_i sont deux à deux orthogonaux, alors on a :

$$\left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$$

Proposition 16 : [Hassan, p.484]
Soit A une partie non vide de H.
Si B est une partie non vide de H, alors on a $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$.
En particulier, si $A \subseteq B$, alors $B^\perp \subseteq A^\perp$.

Proposition 17 : [Hassan, p.484 + 485]
Soit A une partie non vide de H.
* $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de H et on a $A \cap A^\perp = \{0_H\}$.
* On a $\overline{A} \subseteq \left(A^\perp\right)^\perp$. * On a $\overline{A}^\perp = A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp$.
* Si A est dense dans H, alors $A^\perp = \{0_H\}$.

II Théorèmes de projection et conséquences

Dans toute cette partie, on suppose que $(H, <\cdot;\cdot>)$ est un espace de Hilbert.

II.1 Théorèmes de projection

Développement 1 : [cf. HASSAN]

Théorème 18 : [Hassan, p.489]
Soit C un convexe fermé non vide de $(H, <\cdot;\cdot>)$.
Pour tout $x \in H$, il existe un unique $c \in C$ (appelé **projection de x sur C**) tel que $d(x,C) = \|x-c\|$ avec pour tout $z \in C$, $\mathrm{Re}(<z-c; x-c>) \leq 0$.
De plus, en notant P_C la projection sur C, on a P_C 1-lipschitzienne (donc continue).

Proposition 19 : [Hassan, p.489]
Soient F un sous-espace vectoriel de H, $x_0 \in H$ et $x \in F$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :
* $\|x - x_0\| = d(x,F)$.
* $x - x_0 \in F^\perp$ (autrement dit, pour tout $y \in F$, on a $<x - x_0, y> = 0$).

Théorème 20 : [Hassan, p.490]
Soit F un sous-espace vectoriel fermé de $(H, <\cdot;\cdot>)$.
L'application $P_F : H \longrightarrow F$ est linéaire continue et telle que :
* P_F est une projection telle que $P_F \circ P_F = P_F$. * $\mathrm{Ker}(P_F) = F^\perp$ et $\mathrm{Im}(P_F) = F$.

Corollaire 21 : [Hassan, p.491]
Soit F un sous-espace vectoriel de H.
$*$ On a $\overline{F}^{\perp} = F^{\perp}$, $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = \overline{F}$ et $H = \overline{F} \underset{\text{top.}}{\oplus} F^{\perp}$.
$*$ F est dense dans H si, et seulement si, $F^{\perp} = \{0_H\}$.

Remarque 22 :
L'hypothèse de fermeture dans le corollaire précédent n'est pas superflue. En effet, pour $H = \ell^2_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ et F l'ensemble des suites de H nulles à partir d'un certain rang, on a $F^{\perp} = \{0_H\}$ mais $H \neq F$.

II.2 Théorème de représentation de Riesz

Proposition 23 : [Hassan, p.491]
L'application :

$$J : \left|\begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & H^* \\ y & \longmapsto & \varphi_y : \left|\begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & < x; y > \end{array}\right. \end{array}\right.$$

est une isométrie semi-linéaire.

Théorème 24 : Théorème de représentation de Riesz [Hassan, p.492] :
Pour toute forme linéaire continue φ, il existe un unique $y \in H$ tel que $\varphi = \varphi_y$.

Remarque 25 : [Hassan, p.492]
Autrement dit, J est surjective.

Corollaire 26 : [Hassan, p.492]
Tout espace de Hilbert est réflexif.

II.3 Adjoint d'un opérateur

Définition 27 : Adjoint d'un opérateur [Hassan, p.493] :
On considère $T \in \mathcal{L}_c(H)$.
Il existe un unique opérateur $T^* \in \mathcal{L}_c(H)$ appelé **adjoint de** T tel que :

$$\forall x, y \in H, < T(x); y >=< x; T^*(y) >$$

Proposition 28 : [Hassan, p.493 + 494]
Pour tout $T \in \mathcal{L}_c(H)$, on a :

$$(T^*)^* = T,\ \|\|T^*\|\| = \|\|T\|\| \text{ et } \|\|T^* \circ T\|\| = \|\|T \circ T^*\|\| = \|\|T\|\|^2$$

Proposition 29 : [Hassan, p.493]
$*$ L'application :

$$A : \left|\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_c(H) & \longrightarrow & \mathcal{L}_c(H) \\ T & \longmapsto & T^* \end{array}\right.$$

est une isométrie semi-linéaire.
$*$ On a $\mathrm{Id}_H^* = \mathrm{Id}_H$. $*$ Pour tout $T, S \in \mathcal{L}_c(H)$, $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$.
$*$ Si $T \in \mathcal{L}_c(H)$ est un homéomorphisme, alors T^* est un homéomorphisme et $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Exemple 30 : [Hassan, p.494 + 495]
$*$ On considère F un sous-espace vectoriel fermé de H.
L'adjoint de l'opérateur d'injection canonique $\iota : H \longrightarrow F$ est l'opérateur de projection orthogonale $p : H \longrightarrow F$.
$*$ Dans $H = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, $\mathcal{L}(H)$ s'identifie à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $T^* = T^{\top}$.
$*$ Dans $H = \mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire canonique, $\mathcal{L}(H)$ s'identifie à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $T^* = \left(\overline{T}\right)^{\top}$.

Proposition 31 : [Hassan, p.495]
Soit $T \in \mathcal{L}_c(H)$.
On a $\mathrm{Ker}\,(T^*) = \mathrm{Im}(T)^{\perp}$ et $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}\,(T^*)^{\perp}$.

Proposition 32 : [Hassan, p.495]
Soit $T \in \mathcal{L}_c(H)$.
$*$ $T(H)$ est dense dans H si, et seulement si, T^* est injectif.
$*$ $T^*(H)$ est dense dans H si, et seulement si, T est injectif.

III Bases hilbertiennes et applications

III.1 Généralités

Dans toute cette sous-partie, on suppose que $(H, < \cdot; \cdot >)$ est un espace préhilbertien.

Définition 33 : Famille orthogonale/orthonormale/totale [Hassan, p.359 + 485] :
On considère une famille $(x_i)_{i \in I}$ quelconque d'éléments de H.
On dit que $(x_i)_{i \in I}$ est une :
$*$ **famille orthogonale** lorsque pour tout $(i, j) \in I^2$, $(i \neq j) \implies < x_i; x_j >= 0$.
$*$ **famille orthonormale** lorsque pour tout $(i, j) \in I^2$, $< x_i; x_j >= \delta_{i,j}$.
$*$ **famille totale** lorsque toutes les combinaisons linéaires finies des x_i sont denses dans H.

Définition 34 : Base hilbertienne [Hassan, p.502] :
Toute famille orthonormale et totale est appelée **base hilbertienne**.

Proposition 35 : [Hassan, p.502]
Soient $(e_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne de H et $y, z \in H$.
Si pour tout $i \in I$ on a $< y; e_i >=< z; e_i >$, alors $y = z$.

Proposition 36 : [Hassan, p.502]
Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormale de H.
Si $(H, < \cdot; \cdot >)$ est un espace de Hilbert et que $\{e_i,\ i \in I\}^{\perp} = \{0_H\}$, alors $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne de H.

Exemple 37 : [Hassan, p.502]
Si l'on considère $H = \ell^2_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$, alors la base canonique formée des $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $e_n = (\delta_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $\ell^2_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$.

Théorème 38 : Inégalité de Bessel [Hassan, p.504] :
Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormale de H.
Pour tout $x \in H$, on a $\sum_{i\in I} |< x; e_i >_H|^2 \leq \|x\|_H^2$.

Théorème 39 : Égalité de Parseval [Hassan, p.504] :
Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormée de H.
Si $(H, < \cdot; \cdot >)$ est un espace de Hilbert, alors les assertions suivantes sont équivalentes :
$*$ $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne de $(H, < \cdot; \cdot >)$.
$*$ Pour tout $x \in H$, $\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |< x; e_n >|^2$.
$*$ Pour tout $x \in H$, $x = \sum_{i\in I} < x; e_i > e_i$.
$*$ Pour tous $x, y \in H$, on a $< x; y >= \sum_{i\in I} < x; e_i > \overline{< y; e_i >}$.

Théorème 40 : [Hassan, p.506] [ADMIS]
Si $(H, < \cdot; \cdot >)$ est un espace de Hilbert, alors toute famille orthonormale dans H est contenue dans une base hilbertienne de H.
En particulier, tout espace de Hilbert non vide admet une base hilbertienne.

Théorème 41 : Procédé d'orth. de Gram-Schmidt [Hassan, p.506] :
Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite finie ou infinie de vecteurs linéairement indépendants de H et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = \mathrm{Vect}(\{x_0, ..., x_n\})$.
Si l'on pose :

$$y_0 = x_0,\ y_{n+1} = x_{n+1} - p_{F_n}(x_{n+1}),\ e_0 = \frac{1}{\|y_0\|_H} y_0 \text{ et } e_{n+1} = \frac{1}{\|y_{n+1}\|_H} y_{n+1}$$

alors la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormale et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Vect}(\{e_0, ..., e_n\}) = F_n$.

Théorème 42 : [Hassan, p.507]
Si $(H, < \cdot; \cdot >)$ est un espace de Hilbert de dimension infinie, alors les assertions suivantes sont équivalentes :
$*$ H est séparable. $*$ H possède une base hilbertienne dénombrable.
$*$ Toute famille orthonormale de H est au plus dénombrable.

Théorème 43 : [Hassan, p.507]
Si $(H, < \cdot; \cdot >)$ est un espace de Hilbert de dimension infinie, alors deux bases hilbertiennes de H ont le même cardinal.

Définition 44 : Dimension hilbertienne [Hassan, p.508] :
On appelle **dimension hilbertienne** d'un espace de Hilbert le cardinal d'une base hilbertienne.

Remarque 45 : [Hassan, p.508]
L'image d'une base hilbertienne par une application T linéaire et isométrique reste une base hilbertienne (car T conserve le produit scalaire).

Théorème 46 : [Hassan, p.508]
Si $(H, < \cdot; \cdot >)$ est un espace de Hilbert, alors :
$*$ Si H est de dimension finie n et si $(e_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est une base hilbertienne de H, alors l'application :

$$J : \left| \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ x & \longmapsto & (< x; e_i >)_{i\in[\![1;n]\!]} \end{array} \right.$$

est une isométrie linéaire et surjective.
$*$ Si H est séparable et de dimension infinie et que $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H, alors l'application :

$$J : \left| \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \ell^2_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}) \\ x & \longmapsto & (< x; e_i >)_{i\in\mathbb{N}} \end{array} \right.$$

est une isométrie linéaire et surjective.
$*$ Si H est non séparable et de dimension infinie et que $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne de H, alors l'application :

$$J : \left| \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \ell^2_{\mathbb{K}}(I) \\ x & \longmapsto & (< x; e_i >)_{i\in I} \end{array} \right.$$

est une isométrie linéaire et surjective.

Corollaire 47 : [Hassan, p.509]
Deux espaces de Hilbert sont isométriquement isomorphes si, et seulement si, ils ont la même dimension hilbertienne.

III.2 Application aux séries de Fourier

Dans toute cette sous-partie, on considère f une fonction 2π-périodique et intégrable sur $[0; 2\pi]$ et on note $\mathbb{T}$ le cercle trigonométrique.

Proposition 48 : [El Amrani, p.171]
L'espace $L^2(\mathbb{T})$ muni du produit scalaire :

$$< \cdot;\cdot >: \left| \begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{T}) \times L^2(\mathbb{T}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (f,g) & \longmapsto & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est un espace préhilbertien complexe.

Définition 49 : Famille des exponentielles [El Amrani, p.172] :
On définit la **famille des exponentielles** $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad e_n : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & e^{inx} \end{array} \right.$$

Proposition 50 : [El Amrani, p.172]
La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale de $L^2(\mathbb{T})$.

Définition 51 : Coefficient de Fourier [El Amrani, p.173] :
On considère $n \in \mathbb{Z}$.
On appelle **n-ième coefficient de Fourier de** f (noté c_n) le nombre complexe défini par : $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x$.

Remarque 52 : [El Amrani, p.173]
On remarque que si $f \in L^2(\mathbb{T})$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n(f) =< f; e_n >$.

Définition 53 : Série de Fourier [El Amrani, p.178] :
On appelle **série de Fourier de** f la série formelle $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{in\cdot}$.

Théorème 54 : [El Amrani, p.173]
La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$.

Corollaire 55 : [El Amrani, p.193]
Pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$, $\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$.

Théorème 56 : [El Amrani, p.195]
Si $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors sa série de Fourier converge normalement sur $\mathbb{R}$ et on a $f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e_n$.

Exemple 57 : [El Amrani, p.210]
On obtient en application :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

III.3 Application aux polynômes orthogonaux

Dans toute cette sous-partie, on considère un intervalle $I =]a; b[$ borné ou non de $\mathbb{R}$.

Définition 58 : Fonction poids [El Amrani, p.40] :
On appelle **poids sur** I une application $\rho : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n \rho(x)\mathrm{d}x < +\infty$.

Définition 59 : L'espace $L^2(I,\rho)$:
On appelle **espace** $L^2(I,\rho)$ l'ensemble $\left\{f : I \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tq } \int_I |f(x)|^2\rho(x)\mathrm{d}x < +\infty\right\}$.

Proposition 60 : [El Amrani, p.41]
L'espace $L^2(I,\rho)$ est un espace de Hilbert et tout polynôme appartient à $L^2(I,\rho)$.

Théorème 61 : [El Amrani, p.41]
Il existe une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(L^2(I,\rho)\right)^{\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires orthogonaux et tels que $\deg(P_n) = n$ (cette famille s'appelle la famille des **polynômes orthogonaux associée au poids** ρ).

Exemple 62 : [El Amrani, p.41]
* Si $I = \mathbb{R}_+^*$ et $\rho(x) = e^{-x}$, on obtient alors les polynômes de Laguerre.
* Si $I = \mathbb{R}$ et $\rho(x) = e^{-x^2}$, on obtient alors les polynômes de Hermite.
* Si $I =]-1; 1[$ et $\rho(x) = 1$, on obtient alors les polynômes de Legendre.
* Si $I =]-1; 1[$ et $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, on obtient alors les polynômes de Tchebychev.

Développement 2 : [cf. EL AMRANI]

Théorème 63 : [El Amrani, p.47]
Soit ρ une fonction poids sur I.
S'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\mathrm{d}x < +\infty$, alors les polynômes orthogonaux normalisés associés à ρ forment une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

Remarque 64 : [El Amrani, p.46]
L'hypothèse faite sur ρ n'est pas superflue. En effet, en considérant $I =]0; +\infty[$, $\rho(x) = x^{-\ln(x)}$ et $f(x) = \sin(2\pi\ln(x))$, on a $\int_I f(x)x^n\rho(x)\mathrm{d}x = 0$.

Remarques sur la leçon

— Les espaces de Hilbert définissent le cadre parfait pour faire de la géométrie : distances, angles, etc. On tombe sur des espaces euclidiens généralisés.

— Il est également possible de parler de l'espace de Bergman, d'optimisation dans un Hilbert, ou bien encore de l'espace L^2, voire même de la séparation des convexes ou encore de la théorie spectrale des opérateurs autoadjoints.

Liste des développements possibles

— Théorème de projection sur un convexe fermé.

— Polynômes orthogonaux.

Bibliographie

— Nawfal El Hage Hassan, *Topologie générale et espaces normés*.

— Mohammed El Amrani, *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*.